

第13章 静的な場の法則

～クーロンの法則と万有引力の法則～

この章から、重力の理論についての記述を開始する。これから構築される重力理論の基本的な方法は、電気力学のような形式で重力の理論を記述することである。われわれの行うことは基本的に類推であり、そのお手本はマクスウェルらの構築した電気力学である。このような立派な理論が既にあるおかげでわれわれの行う仕事はそれほど多くないが、そのためには嫌でも電気力学を学ばねばならない。

電気力学におけるクーロンの法則と万有引力の法則は、とてもよく似ており、実際、数学的な定式化はほとんど同じと言ってよい。このことは既によく研究されており、物理学者が100人いれば、100人が認めるようなことである。この章では、このような理論を確認しておくことにしよう。次章では、重力的な磁場という概念を発見することにするが、この章で述べることは、その基礎として必要である。

13.1 クーロンの法則

電気を帯びている物体を帯電体といい、その帯電体の電気量のことを電荷という。一般に電気を帯びた物体というものは空間的な拡がりを持つが、その拡がりがないもの、点と見なしたものを点電荷とよぶ。

電荷には2種類あり、1つは正電荷、もう一つは負電荷という。真空中において、静止している電荷の間に働く力は、二つの電荷の積に比例し、両者の距離の二乗に反比例する。力の方向は、電荷の積が正のときは互いに反発し、負のときは互いに引き合う。ただし、電荷は点電荷と見なせるものとする。式で書けば、

$$F \propto \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (13.1)$$

ただし、 F ; 二つの電荷の間力、 Q_1, Q_2 ; 電荷、
 k ; 比例定数、 r ; 電荷間の距離

ベクトル的に書けば、

$$\mathbf{F}_2 = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \mathbf{r}_{12} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \mathbf{r}_0 \quad (13.2)$$

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 = -k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \mathbf{r}_{12} = k \frac{Q_2 Q_1}{r^2} \mathbf{r}_{21} = k \frac{Q_2 Q_1}{r^2} \mathbf{r}_0 \quad (\mathbf{r}_{12} = -\mathbf{r}_{21})$$

ただし、 \mathbf{F}_2 ; Q_2 に働く力、 \mathbf{F}_1 ; Q_1 に働く力、

\mathbf{r}_{12} ; Q_1 から Q_2 へ向けた単位ベクトル、

\mathbf{r}_{21} ; Q_2 から Q_1 へ向けた単位ベクトル

\mathbf{r}_0 ; 式中の左側の電荷から右側の電荷へ向けた単位ベクトル

(規約)

Q_1 に働く力の方向と Q_2 に働く力の方向は、それぞれの電荷の正負の組み合わせに拘わらず、常に反対である。すなわち、

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \quad (13.3)$$

である。式(13.1)のような関係をクーロンの法則という。

電荷の正負と力の方向の関係は、

Q_1	Q_2	$Q_1 Q_2$	\mathbf{F}_1	\mathbf{F}_2
+	+	+		
-	-	+		
-	+	-		
+	-	-		

となっており、電荷の積 Q_1Q_2 が正のとき斥力で、負のとき引力になる。

電荷という量を量的に比較するには単位となる量が必要であるが、電荷という量は質量などに比べ、比較的新しい量であり、クーロンの法則が発見される前までは存在していない単位であった。このような場合、比例定数 k と電荷の単位の間には任意性があり、任意に比例定数を決めれば電荷の単位量が決まり、逆に任意に電荷の単位量を決めれば、比例定数が決まる。この組み合わせは無限に存在するが、現在、一般に使われている単位量として、電荷の単位には、C（クーロン）とesu（エルステッド）の2種類が存在している。前者はM K S系単位で、後者はC G Sガウス系の単位である。呼び方はそれぞれ科学者の名前に因んでいる。クーロンは式(13.1)の k を

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.98755179 \times 10^9$$

ただし、 ϵ_0 は真空の誘電率とよばれるもので、 $8.85418782 \times 10^{-12}$ という量である。

とおいた場合の量であり、エルステッドは式(13.1)の k を

$$k = 1$$

とおいた場合の量である。この2つの単位のどちらがより合理的な量であるかということを考えることはあまり意味のないことである。例えば、長さの最も一般的な単位であるメートルに合理的な理由があって、ヤードに合理的な理由がないということはない。所詮、単位量というものはどこかの誰かが適当に決めたもので、合理的な理由など何もない。電荷量で言えば、どこかの誰かが適当に電荷を集めて、その量が電荷の単位量であると主張しても、別にかまわない。この場合で言えば、 $k = 8.98755179 \times 10^9$ や $k = 1$ とおいたこ

とに基本的に物理的な理由など存在せず、ただ適当に決めているだけである。ただし、比例定数の置き方により、方程式が簡潔に表現できることは確かである。例えば、 $\epsilon_0 = 1$ とすれば $k = 1/4\pi$ となり、後に述べる電束密度という量を別に定義する必要がなくなり、方程式をより簡潔に記述することができるだろう。

また、力の単位ニュートンは $1[N] = 1[kgm/s^2]$ であるが、例えば、これを $1[o] = 0.12345[kgm/s^2]$ などと定義して、 $[o]$ は力の単位であると主張しても、別に間違っていない。ただ、計算が面倒になるから、誰もこのような単位は採用しないだろうが。

単位の決定は普通、歴史的に決められる。万有引力の法則は、

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

と書かれ、 $G = 6.67 \times 10^{-11}$ という比例定数が使われるが、これを $G = 1$ と置いて、力の単位と距離の単位を変えないことにすれば、新しい質量の単位が定義できることになる。このような単位を使えば、万有引力の法則は、

$$F = \frac{Mm}{r^2}$$

と書くことができる。このように書いた方が方程式は簡潔であるから、質量の単位を改めるべきだと主張したところで、誰も耳を貸さないだろう。もし、このようなことを認めると、既存の万有引力の法則や質量のことが書かれている文献や工業製品を全部直さなくてはならなくなる。そんな面倒なことは誰もしたくないから、このような変更は避けられるのである。また、この例でも明らかのように物理定数というものは単位の決め方と同様に任意性を持っていることがわかる。物理学の単位は誰かの適当な思いつきではなく、不変的な物理現象に依存して決定されるべきだと考えるならば、多くの物理定数を単位に組み込むことが可能であり、クーロンの法則につ

いても $k = 8.98755179 \times 10^9$ と置くことはあまり誉められたものではないが、歴史的にそうなのだとわれれば、何も返す言葉はない。

物理的には、適当に定められた電荷の単位で、電荷量の大小関係を比較できればそれでよい。クーロンの法則を使えば、クーロンで測っても、エルステッドで測っても、電荷量を量的に定めることができる。われわれはより一般的な単位系である M K S 単位系を採用することにしよう。この単位系は万有引力の法則との対応を考える点でも都合がよいからである。この単位を用いたクーロンの法則は、

$$\mathbf{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}_0 \quad (13.4)$$

となる。

13.2 電場

クーロンの法則は万有引力の法則と同じように、クーロン力を伝える効果は瞬間的に伝わるとした近似において成立する。電荷が動いているような場合は、この法則は一般に成り立たない。この章で述べることは電荷が動いていないと見なせる近似の法則である。このような静的な電場は静電場とよばれている。

電荷 Q の周りに別の電荷 q を持ってきたとすれば、 q にはクーロンの法則に従う力が働く。その力の大きさは、電荷 Q と電荷 q の距離によって違ってくるし、距離が同じでも、電荷 Q の電荷量によっても違ってくるということがクーロンの法則から言える。このことは電荷 Q の及ぼす効果が空間的な関数として表現できることを示している。電荷の大きさによって、その周囲へのクーロン力の及ぼし方は異なってくる。すなわち、電場の様子が異なってくる。電場を量的に表現するには、元の電荷による電場の分布を乱さないように電場の一点に単位電荷を持ってきたときに、これに働くであろう力を

考えればよい。これを電場の強さとよぶことにしよう。精密に電場の強さを測るには、極めて微量の電荷、数学的には無限小の電荷を持ってきた際に、これに働く力を単位電荷あたりに換算すればよい。万有引力場と同じように、無限小の電荷に働く力は、

$$\mathbf{E} = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(\Delta q)}{\Delta q} \quad (13.5)$$

として与えられることになる。これを単位電荷あたりに換算すれば、

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad (13.6)$$

ということになる。この \mathbf{E} は、式(13.4)との対応から、

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}_0 \quad (13.7)$$

である。この \mathbf{E} は電場の強さ、あるいは単に電場とよばれている。

13.3 電位

一般に、物理学における仕事という概念は、力と変位の積の形で与えられ、区間 A から B で力 \mathbf{F} が働くならば、その仕事 W は

$$W = - \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (13.8)$$

と表される。ここに現れた負号は任意にとった座標系に依存して決定されている便宜的なものである。この式に式(13.6)を代入すれば、

$$W = -\int_A^B q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (13.9)$$

と書かれ、クーロン力場（電場 \mathbf{E} ）に対する仕事という量を定義することができる。

この式の特別な場合として、単位電荷を運ぶに要する仕事は、 $q=1$ と置いた場合であり、

$$\varphi_{BA} = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (13.10)$$

と書くことができる。この φ_{BA} は点 B の点 A に対する電位差とよばれているものである。クーロン力場は万有引力場と同じ中心力であるから、保存力場であり、静的な電場 \mathbf{E} において、

$$\text{rot}\mathbf{E} = 0$$

が成立する。

この φ_{BA} という量は途中の経路によらず一定である。すなわち、積分路は任意にとってよいから、積分路として、点 O を通るとすると、式(13.10)は、

$$\varphi_{BA} = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -(\int_A^O \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_O^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s})$$

と書くことができ、積分の公式より、

$$\int_A^O \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int_O^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

であり、

$$\varphi_{AO} = -\int_O^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}, \quad \varphi_{BO} = -\int_O^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

と置くと、

$$\varphi_{BA} = \varphi_{BO} - \varphi_{AO} \quad (13.11)$$

と書くことができる。この式は電場内の任意の基準点Oに対する電位差がわかっているならば任意の2点間の電位差は、それぞれの点の基準点Oに対する電位差の差をとればよいことを示している。この基準点は、最も便宜のよいところを選べばよく、無限遠点にすると都合がよい。この無限遠点との電位差は、

$$\varphi = -\int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (13.12)$$

と書くことができ、この φ は単に電位とよばれている。この φ は電気力学におけるポテンシャルである。

13.4 電位の傾き

電位は空間の関数であり、第10章でも述べたように、この量の空間に対する傾きを考えることができる。この電位の傾きと電場の強さの関係は、

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = -\nabla\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}\right) \quad (13.13)$$

と書かれる。 \mathbf{E} を空間積分した量が φ であるから、 φ を空間微分したものが \mathbf{E} であるのは当然であり、式(13.13)は式(13.12)の別表現である。式(13.12)のような形式を積分形式による表現といい、式(13.13)のような表現を微分形式による表現といわれることもある。

13.5 電荷分布

いままで、電荷の分布は点と見なせるものとして、その拡がりについては考えてこなかった。ここでは連続的な電荷分布へ一般化することにしよう。電荷は空間的な場所に存在していることは明らかであるから、電荷の分布ということを考えるには、その体積分布を考えることになる。その量は単位体積内にある電荷量のことである。電荷密度 ρ とよばれる。この ρ は空間的なスカラー関数であり、単位は [電荷/体積] である。 ρ を x, y, z 座標の関数としてあらわすと、 $\rho(x, y, z)$ と書くことができる。この量と極少体積 $dxdydz$ の積 $\rho(x, y, z)dxdydz$ は、その極少体積中に含まれる電荷量である。領域 V 内に含まれる全電荷量が Q であるとし、極少体積を $dv = dxdydz$ と書き、 $\rho(x, y, z)dv$ をその領域において体積積分すれば、その量は全電荷量である。すなわち、

$$Q = \int_V \rho dv \quad (13.14)$$

である。

13.6 電束とガウスの法則

式(13.7)の ε_0 を 1 と置いた量を定義しよう。その量は電束密度とよばれ、

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{r}_0 \quad (13.15)$$

である。定義から明らかのように、真空中において、

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (13.16)$$

である。

いま、 Q は風船のような任意の形をした閉曲面の内部にあるとして、その閉曲面上の極少な面（以後、面積素とよぶ）に垂直な方向で、大きさは面積素に等しい面積ベクトル dS とベクトル D の面積分を考える。閉曲面全部の面積分は、

$$\Phi = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \quad (13.17)$$

と書くことができる。この Φ は電束とよばれるものである。

簡単な場合として、閉曲面が半径 r の球で、 Q がその中心にある場合、 D と dS は平行であるから、

$$\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = DdS \cos 0 = DdS$$

であり、単位面積あたりに換算すれば、この電束密度 D は $\frac{Q}{4\pi r^2}$ であり（単位面積あたりの電束の量ということで電束密度とよばれる）、球の表面積は $4\pi r^2$ であるから、全体の電束は、

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi r^2} \times 4\pi r^2 = Q$$

である。したがって、電束と電荷は等しくその量は、球の半径によらない。

このことは任意の形をした閉曲面を通る全体の電束でも球の場合と同じである。例えば、 Q を銃弾などの粒子が、すべての方向へ一定の割合で放出される源であると想像すれば直感的に理解できる。数学的にも難しいことではない。面積ベクトル dS と D の直交する成分の面積が内積で与えられるからである(図13.1)。

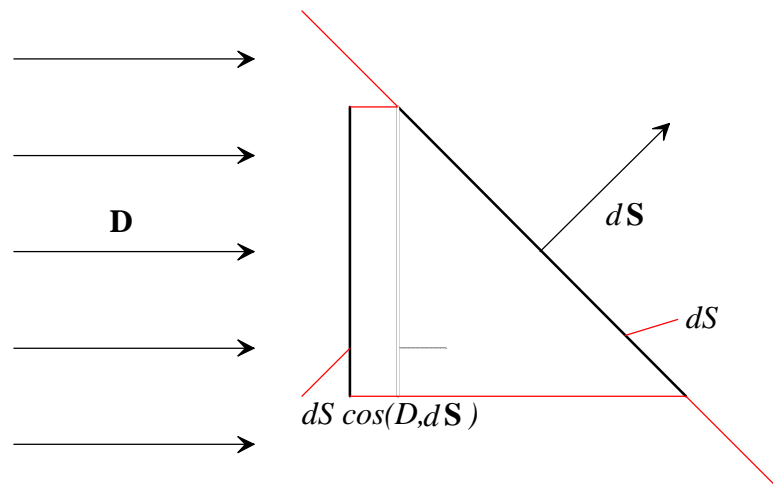


図13.1 $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ の意味

したがって、

$$\Phi = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \quad (13.18)$$

また、式(13.14)より、

$$\Phi = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dv \quad (13.19)$$

という関係が得られる。また、式(13.16)より、

$$\Phi = \int_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dv \quad (13.20)$$

と書くこともできる。この関係がガウスの法則と呼ばれているものである。これを言葉で書けば、ある閉曲面を通る電束密度 \mathbf{D} の全曲面についての面積分は、その閉曲面内部の全電荷に等しい。この法則はクーロンの法則を拡張したものであり、ガウスの法則とクーロンの法則は別の物理法則ではなく、同じ法則の別形式の表現であ

る。集合的な表現を使えば、クーロンの法則はガウスの法則に含まれる。

13.7 ガウスの法則の微分形式

ガウスの発散定理、式(11.27)によれば、任意のベクトル A に対して、

$$\int_S A \cdot dS = \int_V \operatorname{div} A dv \quad (13.21)$$

の関係があった。この式と式(13.20)から、

$$\int_V \operatorname{div} E dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv$$

と書くことができる。したがって、

$$\operatorname{div} E = \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (13.22)$$

を得る。この式はガウスの法則の微分形式による表現である。この式は動いている電場においても成立する。ガウスの法則は、放射状に一定の量で放出され続ける弾丸のようなものであると考えることができるが、例えば、停まっている戦車から、機関銃で弾丸を撃った場合と走っている戦車から撃った場合で、一定の時間における弾丸の弾数が違ってくるということはない。

この式に式(13.13)を代入すれば、

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (13.23)$$

となる。この式をポアソンの方程式という。

13.8 万有引力の法則の電気力学的表現

いままで述べてきた静的な電場の法則は、ほとんどそのまま静的な重力場の法則に適用することができる。静的な重力場の法則（万有引力場の法則）を静的な電場の法則との対応を考慮し、ここで列記しておくことにしよう。

(1) 重力場の強さと重力ポテンシャルの傾きの関係

$$\mathbf{E}_g = -\nabla\varphi_g \quad (13.24)$$

ただし、 \mathbf{E}_g ; 重力場の強さ、 φ_g ; 重力ポテンシャル

(2) 重力場におけるガウスの法則

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_g = \frac{\rho_g}{G_0} \quad (13.25)$$

ただし、 ρ_g ; 質量密度、 G_0 ; 別形式の重力定数(= $1/4\pi G$)

(3) 重力場におけるポアソンの方程式

$$\nabla^2 \varphi_g = -\frac{\rho_g}{G_0} \quad (13.26)$$

これらのことから、静的な電場の法則と静的な重力場の法則は形式的に全く同様であることがわかる。ただし、電気は、正負の2種類の電荷という要素から構成されているのに対し、重力では正の1種類の質量という要素から構成されていることが決定的な違いであることはいうまでもない。重力場におけるガウスの法則は万有引力の法則の別表現であり、これらの方程式が静的な重力場の法則のすべてである。